XXVI олімпіада з математики Русанівського ліцею м. Києва (2023)

Командна олімпіада, 8–9 класи.

Розв'язання задач

1. *(Олег Черкаський)* Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, яке дотикається до сторін BC, AC і AB у точках K_1, K_2 і K_3. Позначимо точки, у яких промені K_1I, K_2I та K_3I перетинають сторони і продовження сторін трикутника ABC, як показано на рис. 1. Доведіть, що $N_1P_1 = N_2P_2 + N_3P_3$.

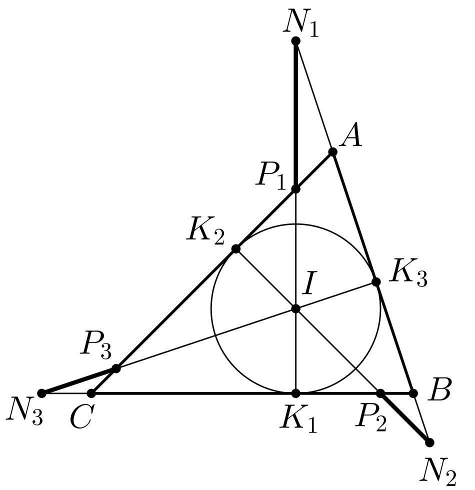

Рис. 1.

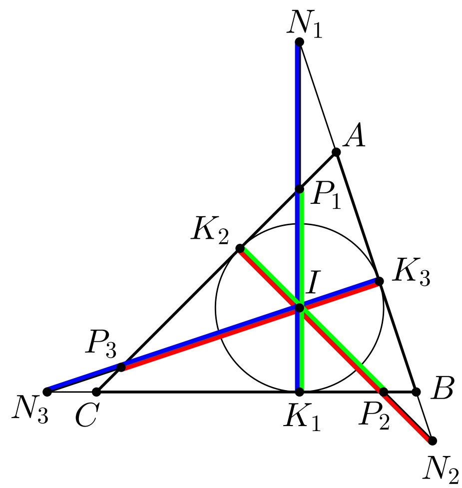

Рис. 2.

Розв'язання. Прямокутні трикутники AK_2N_2 та AK_3P_3 рівні (кут при вершині A спільний, $AK_2 = AK_3$ як дотичні), тому $K_2N_2 = K_3P_3$. Аналогічно з рівності трикутників BK_1N_1 та BK_3N_3 дістаємо, що $K_1N_1 = K_3N_3$, а з рівності трикутників CK_1P_1 та CK_2P_2 — що $K_1P_1 = K_2P_2$. Позначимо довжини рівних червоних, синіх та зелених відрізків на рис. 2 таким чином:

$$K_2N_2 = K_3P_3 = u, \quad K_1N_1 = K_3N_3 = v, \quad K_1P_1 = K_2P_2 = w.$$

Тоді $N_1P_1 = v - w$ та $N_2P_2 + N_3P_3 = (u - w) + (v - u) = v - w = N_1P_1$.

2. Квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два натуральні корені, причому a, b, c цілі та $a + b + c$ є простим числом. Знайдіть хоча б один з коренів цього рівняння.

Розв'язання. Нехай рівняння має корені x_1 та x_2. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ та $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, тому $a + b + c = a - (x_1 + x_2)a + x_1x_2a = a(x_1 - 1)(x_2 - 1)$. Оскільки a ціле, а $x_1 - 1$ та $x_2 - 1$ цілі невід'ємні, добуток цих чисел може бути простим лише при $x_1 - 1 = 1$ або $x_2 - 1 = 1$, тобто $x_1 = 2$ або $x_2 = 2$.

Відповідь: 2.

3. *(Олександр Шамович)* Нехай M_1 та M_2 — середини катетів BC та AC прямокутного трикутника ABC. Зовнівписані кола дотикаються до сторін BC та AC у точках T_1 та T_2. Доведіть, що відрізки M_1T_2 та M_2T_1 перетинаються на бісектрисі кута ACB.

Розв'язання. (*I спосіб*) Покажемо, що відрізки M_1T_2 та M_2T_1 перетинаються у точці I — центрі вписаного кола трикутника ABC.

Нехай K_1 та K_2 — точки дотику вписаного кола зі сторонами BC та AC (рис. 3). Доведемо, що прямокутні трикутники M_1K_1I та IK_2T_2 подібні. Звідси випливатиме, що $M_1 - I - T_2$ — одна пряма.

Покладемо $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Тоді $IK_1 = IK_2 = \frac{a+b-c}{2}$, $K_1M_1 = \frac{c-b}{2}$, $K_2T_2 = 2K_2M_2 = c - a$ і достатньо перевірити, що $\frac{IK_1}{K_1M_1} = \frac{T_2K_2}{K_2I}$, тобто $\frac{a+b-c}{c-b} = \frac{2(c-a)}{a+b-c}$. Маємо

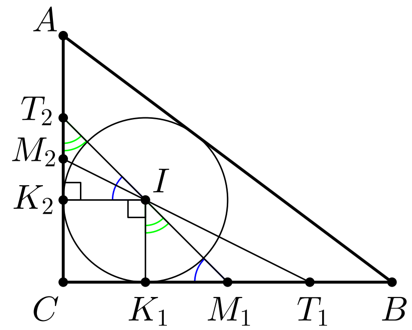

Рис. 3.

$$(a + b - c)^2 = 2(c - a)(c - b),$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc = 2c^2 - 2ac - 2bc + 2ab,$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Отже, M_1T_2 проходить через точку I та аналогічно M_2T_1 проходить через точку I.

(II спосіб) Нехай CL' — бісектриса трикутника CM_1T_2 та CL'' — бісектриса трикутника CM_2T_1. Достатньо довести, що $CL' = CL''$, тобто точки L' та L'' збігаються. За формулою довжини бісектриси

$$CL' = \frac{\sqrt{2}\,CM_1 \cdot CT_2}{CM_1 + CT_2}, \quad CL'' = \frac{\sqrt{2}\,CM_2 \cdot CT_1}{CM_2 + CT_1}.$$

Нехай $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Тоді $CM_1 = \frac{a}{2}$, $CM_2 = \frac{b}{2}$, $CT_1 = \frac{a+c-b}{2}$, $CT_2 = \frac{b+c-a}{2}$. Тому $CM_1 + CT_2 = \frac{b+c}{2}$, $CM_2 + CT_1 = \frac{a+c}{2}$ і достатньо перевірити, що

$$\frac{a(b+c-a)}{b+c} = \frac{b(a+c-b)}{a+c}, \quad \text{або} \quad a - \frac{a^2}{b+c} = b - \frac{b^2}{a+c}.$$

Залишається помітити, що $a - \frac{a^2}{b+c} = a - \frac{c^2-b^2}{b+c} = a - c + b$ та $b - \frac{b^2}{a+c} = b - \frac{c^2-a^2}{a+c} = b - c + a$.

4. Петрик написав на дошці число 2,
потім найменше число з цифрою 0, яке є більшим за попереднє,
потім найменше число з цифрою 2, яке є більшим за попереднє,
потім найменше число з цифрою 3, яке є більшим за попереднє,

і так далі (цифра, яка має зустрітися у наступному числі, змінюється за правилом $2-0-2-3-2-0-2-3-\ldots$; декілька перших чисел це $2, 10, 12, 13, 20, 30, 32, 33, \ldots$). Чи з'явиться на дошці число 2023?

Розв'язання. (I спосіб) Нехай N — номер першого числа на дошці, яке не менше за 2020. Якщо $N = 4k + 1$, то це число 2020 з цифрою 2, наступне число з цифрою 0 це 2021, наступне число з цифрою 2 це 2022 і наступне число з цифрою 3 це 2023. Якщо $N = 4k + 2$, то це число 2020 з цифрою 0, наступне число з цифрою 2 це 2021 і наступне число з цифрою 3 це 2023. Якщо $N = 4k + 3$, то це число 2020 з цифрою 2, а наступне число з цифрою 3 це 2023. Якщо ж $N = 4k$, то це число 2023 з цифрою 3. Таким чином, на дошці неодмінно з'явиться число 2023.

(II спосіб) Припустимо, що одразу після числа $X < 2023$ з'явилося число $Y > 2023$, яке містить шукану цифру a (2, 0 або 3). Але число 2023 теж містить цифру a, тобто Y не може бути найменшим числом з цифрою a, більшим за X, суперечність.

Відповідь: так.

5. *(Володимир Точоний)* Нехай O та H — центр описаного кола та точка перетину висот трикутника ABC, AL_1 — бісектриса цього трикутника. Відомо, що L_1 — середина OH. Знайдіть кути трикутника ABC.

Розв'язання. Нехай AM_1 та AH_1 — медіана та висота трикутника. Оскільки L_1 — середина OH, то точки O та H лежать по різні сторони від BC, а тому трикутник ABC тупокутний. Прямокутні трикутники OM_1L_1 та HH_1L_1 рівні ($OL_1 = HL_1$, $\angle OL_1M_1 = \angle HL_1H_1$ як вертикальні), тому $HH_1 = OM_1$. Якщо $\angle A > 90°$, то H лежить на продовженні AH_1 за точку A та $HH_1 > AH = 2OM_1$, суперечність. Надалі нехай для визначеності $\angle B > 90°$ (рис. 4). Точки O та A лежать по один бік від BC, а точка H по інший бік. Тому з $AH = 2OM_1$ та $OM_1 = HH_1$ випливає, що також $AH_1 = OM_1$, звідки OAH_1M_1 прямокутник. Добре відомо, що AL_1 є бісектрисою кута OAH, отже $\angle L_1AH_1 = \frac{1}{2}\angle OAH = 45°$. Тому $AH_1 = L_1H_1 = \frac{1}{2}M_1H_1$, тобто $OM_1 = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}R$. Але $OM_1 = R\cos\angle A$, отже $\cos\angle A = \frac{1}{2}$ та $\angle A = 60°$. Тепер $\angle C = \angle OAC = \frac{1}{2}(\angle OAH - \angle A) = 15°$ та $\angle B = 105°$.

Відповідь: $\angle A = 60°$, $\angle B = 105°$, $\angle C = 15°$ або $\angle A = 60°$, $\angle B = 15°$, $\angle C = 105°$.

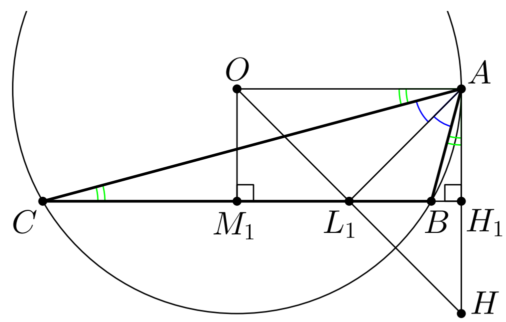

Рис. 4.

6. *(Олександр Толесніков)* Є три однакові справжні монети і дві однакові фальшиві монети, фальшива монета легша за справжню. На безкомпромісних терезах ніколи не буває рівноваги (замість рівноваги терези показують, що переважила випадкова шалька). За яку найменшу кількість зважувань на цих терезах можна гарантовано знайти обидві фальшиві монети?

Розв'язання. Спочатку фальшивими можуть виявитися будь-які дві з п'яти монет — усього 10 варіантів. Під час будь-якого зважування одному з двох можливих результатів відповідає не менше половини наявних варіантів. Тому після трьох зважувань у несприятливому випадку залишиться більше одного варіанта, тобто трьох зважувань може виявитися недостатньо.

Покажемо, як знайти фальшиві монети за чотири зважування. Покладемо на шальки терезів по дві монети. На тій шальці, яка виявиться легшою, хоча б одна з двох монет фальшива (якщо це не так, то дві справжні монети важать не більше, ніж дві інші монети, тобто справжніх монет принаймні чотири, суперечність). Тепер порівняємо ці дві монети. Та з них, що виявиться легшою, гарантовано фальшива. Залишилося три справжні і одна фальшива монета. Покладемо їх по дві на шальки терезів. На тій шальці, яка виявиться легшою, лежать справжня і фальшива монети. Останнім зважуванням порівняємо ці дві монети і знайдемо другу фальшиву монету.

7. Чи правда, що для довільного натурального $x \geq 2$ існує таке натуральне $y > x$, що $y^7 + x$ ділиться на $x^7 + y$?

Розв'язання. Покладемо $y = x^8 - x^7 - 1$. Оскільки $x \geq 2$, то

$$y = (x-1)x^7 - 1 \geq x^7 - 1 > 2x - 1 > x.$$

Далі, $x^7 + y = x^8 - 1$ та $y^7 + x = (x^8 - x^7 - 1)^7 + x$ дає таку ж остачу при діленні на $x^8 - 1$, як $(-x^7)^7 + x = -x(x^{48} - 1) = -x(x^8 - 1)(x^{40} + x^{32} + \ldots + x^8 + 1)$. Отже, $y^7 + x$ ділиться на $x^7 + y$.

Відповідь: так.

Зауваження. Як придумати шуканий приклад? Нехай $x^7 + y = n$. Тоді y при діленні на n дає таку ж остачу, як $-x^7$, а $y^7 + x$ — таку ж остачу, як $(-x^7)^7 + x = -x^{49} + x$. Тому слід обрати y так, аби $x^7 + y$ було дільником $x^{49} - x$. Наприклад, взяти $y = x^8 - x^7 - 1$ або $y = x^{49} - x^7 - x$.

8. *(Матвій Курський)* Нехай O та H — центр описаного кола та точка перетину висот гострокутного трикутника ABC, AD — висота цього трикутника. На стороні BC відмітили такі точки E та F, що O є центром кола, вписаного у трикутник AEF. Виявилося, що $EF = BE + CF$. Доведіть, що H є серединою AD.

Розв'язання. (*І спосіб*) Нехай промені AE і AF вдруге перетинають описане коло трикутника ABC у точках P і Q та AS — діаметр цього кола (рис. 5). Покажемо, що S є центром зовнівписаного кола трикутника AEF, яке дотикається до сторони EF. Зрозуміло, що хорди AP і CB симетричні відносно OE, тому $AP = BC$ та $BE = EP$. Аналогічно $AQ = BC$ та $CF = FQ$. Тому периметр трикутника AEF дорівнює

$$AE + AF + EF = (AE + BE) + (AF + CF) = AP + AQ$$

та $AP = AQ$. Отже, зовнівписане коло трикутника AEF дотикається до продовжень сторін AE та AF саме у точках P і Q, а тому його центром є точка S.

Нехай T — точка дотику зовнівписаного кола зі стороною EF та M — середина BC. Оскільки T, M, D — проекції S, O, A на BC і O — середина AS, то M — середина DT. Кола з центрами O, S і радіусами OM, ST вписані у кут EAF та $AS = 2\,AO$, тому $ST = 2\,OM$. Оскільки $AH = 2\,OM$ то OM — середня лінія у трикутнику SAH та M — середина SH. Тоді $STHD$ паралелограм та

$$HD = ST = 2\,OM = AH,$$

що завершує доведення.

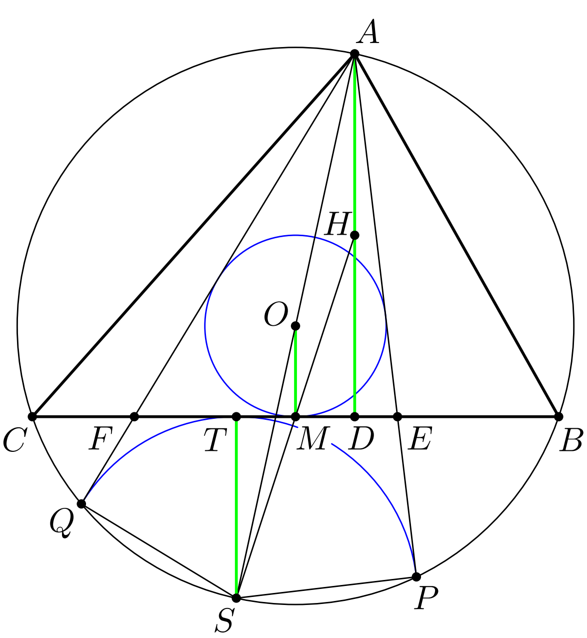

Рис. 5.

(*ІІ спосіб*) Оскільки $AH = 2\,OM$, достатньо довести, що $AD = 4\,OM$. Так само, як у І способі, дістаємо, що периметр трикутника AEF дорівнює $AP + AQ = 2BC$. Також $S_{ABC} = 2S_{AEF}$, бо трикутники мають спільну висоту та $BC = 2EF$. Тому радіус вписаного у трикутник AEF кола дорівнює

$$OM = \frac{2S_{AEF}}{2BC} = \frac{S_{ABC}}{2BC} = \frac{AD}{4}.$$

9. *(Володимир Брайман)* Всередині трикутника ABC відмітили довільну точку G. Нехай D, E та F — середини дуг BGC, AGC та AGB відповідно. Доведіть, що точки D, E, F, G лежать на одному колі.

Розв'язання. (*I спосіб*) Нехай прямі, які проходять через точки A, B, C перпендикулярно до AG, BG та CG, утворюють у перетині трикутник $A_0B_0C_0$ (рис. 6), та I — точка перетину бісектрис цього трикутника. Покажемо, що точки D, E, F лежать на колі з діаметром IG. Справді, дуга BGC є частиною кола з діаметром A_0G, а бісектриса A_0I проходить через середину цієї дуги — точку D. Тому $\angle IDG = \angle A_0DG = 90°$. Аналогічно $\angle IEG = \angle IFG = 90°$.

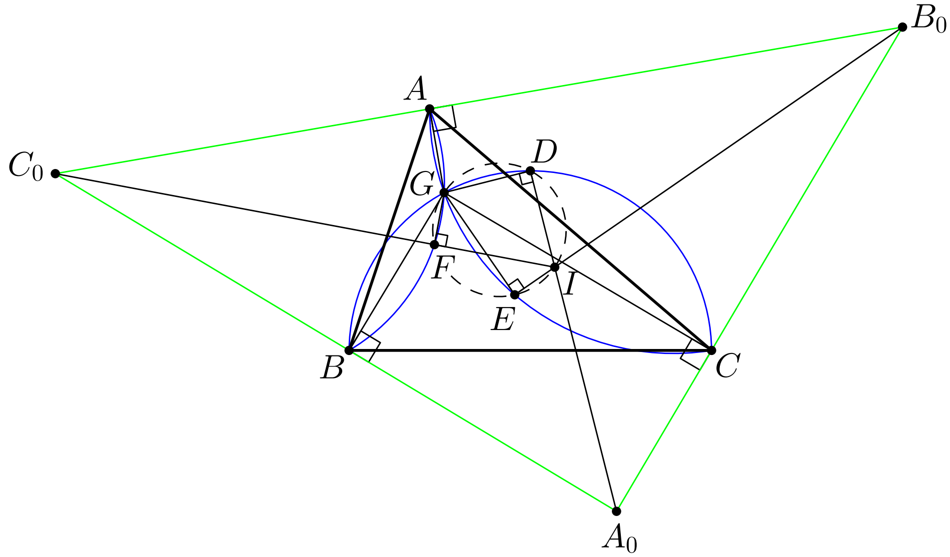

Рис. 6.

(*II спосіб*) Розглянемо інверсію відносно будь-якого кола з центром G. При цій інверсії точки D, E та F перейдуть у точки D', E' та F', в яких зовнішні бісектриси кутів $B'GC'$, $A'GC'$ та $A'GB'$ перетинають прямі $B'C'$, $A'C'$ та $A'B'$ відповідно (рис. 7). Тому за властивістю зовнішньої бісектриси

$$\frac{B'D'}{D'C'} \cdot \frac{C'E'}{E'A'} \cdot \frac{A'F'}{F'B'} = \frac{B'G}{GC'} \cdot \frac{C'G}{GA'} \cdot \frac{A'G}{GB'} = 1,$$

а отже за теоремою Менелая $D' - E' - F'$ — одна пряма. Ця пряма перетинає продовження всіх сторін трикутника $A'B'C'$, а тому не може проходити через точку G, яка знаходиться всередині цього трикутника. Звідси точки D, E, F, G лежать на одному колі.

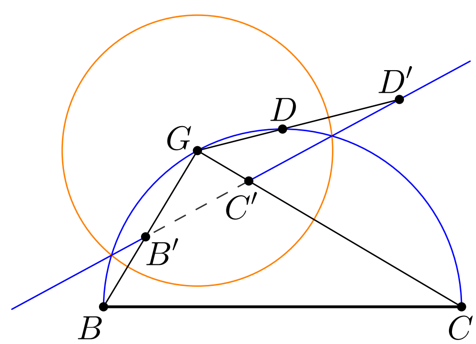

Рис. 7.

10. *(Юхим Рабінович)* Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}+\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}-\sqrt{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-7}}+\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-7}} = 2.$$

Розв'язання. Маємо

$$\left(\sqrt{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}+\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}\right)^2 =$$
$$= \sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}+2\sqrt{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)}+\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1} =$$
$$= 2\sqrt{x+2}+2\sqrt{(x+2)-(x+1)} = 2\sqrt{x+2}+2,$$

аналогічно $\left(\sqrt{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-7}}-\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-7}}\right)^2 = 2\sqrt{x+2}-6$.

Тому рівняння можна переписати у вигляді $\sqrt{2\sqrt{x+2}+2}-\sqrt{2\sqrt{x+2}-6} = 2$, або $\sqrt{y+2}-\sqrt{y-6}=2$, де $y=2\sqrt{x+2}$. Звідси

$$\sqrt{y+2}=\sqrt{y-6}+2, \quad y+2=y-6+4\sqrt{y-6}+4, \quad 4\sqrt{y-6}=4, \quad y=7,$$

$2\sqrt{x+2}=7$ та остаточно $x=\frac{41}{2}$.

Відповідь: $x=\frac{41}{2}$.