

XXVI олімпіада з математики Русанівського ліцею

6 клас

I тур

1. Замість цифр Вінні-Пух використовує літери, при цьому різним цифрам відповідають різні літери, а однаковим — однакові. Виявилось, що при цьому справджується «солодка» рівність $ЖЖ + Ж = МЕД$. Якою цифрою у такому випадку закінчується добуток літер імені $В \cdot І \cdot Н \cdot Н \cdot І \cdot П \cdot У \cdot Х$? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. Оскільки до двоцифрового числа $ЖЖ$ додали одноцифрове число $Ж$ та отримали у результаті деяке трицифрове число, то $Ж$ може відповідати тільки цифрі 9. Тоді $МЕД = 99 + 9 = 108$. Тобто для заміни цифр 0, 1, 8 та 9 Вінні-Пух використав літери Е, М, Д та Ж. Помітимо, що жодна з цих чотирьох літер не використовується в його імені, тому серед 6 літер В, І, Н, П, У, Х точно зустрінеться та, яка відповідає 2, та літера, яка відповідає 5. Тому добуток $В \cdot І \cdot Н \cdot Н \cdot І \cdot П \cdot У \cdot Х$ ділиться націло на $2 \cdot 5 = 10$, а отже, закінчується нулем.

Відповідь: 0.

2. З опівдня до опівночі Пан Коцький гуляє лісом та розповідає казки, а з опівночі до опівдня спить. Перед входом до своєї хати він повісив плакат з написом «За годину я буду робити те саме, що робив дві години тому». Скільки годин на добу цей напис є правдивим?

Розв'язання. Напис є хибним протягом двох годин після того, як Коцький засинає, та останню годину його добового сну, тобто з 0 до 2 год ночі та з 11 до 12 год дня. Так само напис є брехнею з 12 до 14 год, коли Коцький починає розповідати казки, та з 23 до 24 год, коли завершує оповідання. Отже, напис є правильним $24 - 6 = 18$ годин на добу.

Відповідь: 18 годин.

3. Котигорошко вирушив до замку Змія. Через 12 хвилин у тому ж напрямку вирушили Крутивус та Вернидуб, бо кожен з них хотів перемогти Змія самотужки. Крутивус рухався вдвічі швидше, ніж Вернидуб. Вернидуб наздогнав Котигорошка за 12 хвилин. А Крутивус після того, як наздогнав Котигорошка, прибув до замку Змія за 1 годину 58 хвилин. Скільки часу витратив на весь шлях до Змія Крутивус?

Розв'язання. Коли Вернидуб через 12 хв наздогнав Котигорошка, той вже був у дорозі 24 хв. Тоді Вернидуб рухається вдвічі швидше Котигорошка, а отже, Крутивус швидший за нього в $2 \cdot 2 = 4$ рази. Отже, Крутивус наздожене Котигорошка через 4 хв після свого виходу (Котигорошко в цей

момент буде в дорозі 16 хв). Тому Крутивус прибуде до замка Змія через 1 год $58 \text{ хв} + 4 \text{ хв} = 2 \text{ год } 2 \text{ хв}$.

Відповідь: 2 год 2 хв.

4. Кожум'яка має 21 картку, на кожній з яких записано одноцифрове число: 4 картки з одиницею, 2 картки з двійкою, 7 карток з трійкою і 8 — з четвіркою. Він склав з двадцяти карток прямокутник розміром 4×5 так, що суми чисел у кожному стовпчику рівні між собою. При цьому і суми чисел в кожному рядку також виявилися однаковими. Яка картка залишилась у Кожум'яки?

Розв'язання. Оскільки суми чисел у кожному з 5 стовпчиків виявилися рівними, то сума всіх чисел у прямокутнику націло ділиться на 5. Враховуючи, що і в кожному з 4 рядків суми також є однаковими, сума чисел карток, з яких складається прямокутник, має ділитися націло на 4. Отже, сума всіх чисел прямокутника ділиться на $4 \cdot 5 = 20$. Помітимо, що сума чисел на 21 картці дорівнює 61. Отже, сума чисел у прямокутнику дорівнює 60, а в Кожум'яки залишилася картка з одиницею. Залишається лише навести приклад прямокутника 4×5 , який задовольняє умовам задачі (див. рисунок).

4	3	3	3	2
3	4	4	1	3
3	1	4	4	3
2	4	1	4	4

Відповідь: з одиницею.

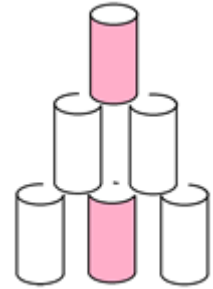
5. Лис Микита зробив про деяке двоцифрове число три твердження: «Це число закінчується на 5 або кратне 7», «Це число більше 20 або має дев'ятку останньою цифрою», «Це число ділиться націло на 12 або менше від 21». Про яке число говорив хитрий Лис Микита? Визначте усі можливі варіанти.

Розв'язання. Якщо припустити, що число закінчується на 5, то воно не може мати 9 останньою цифрою, тож має бути більшим за 20. Тоді воно не менше 21, тому має ділитися націло на 12. Але число, яке закінчується п'ятіркою, не може бути кратним 12, бо є непарним. Отже, шукане число кратне 7. Якби при цьому воно було меншим від 21, то Лис міг би мати на увазі двоцифрове число 14. Однак це число не задовольняє жодній частині другого твердження. Тож потрібне число має ділитися на 12. 84 — єдине двоцифрове число, яке одночасно ділиться на 7 та 12. При цьому воно більше 20, а отже, задовольняє і друге твердження.

Відповідь: 84.

II тур

6. (Десятерик О.О.) На рисунку зображено 6 циліндрів, які стоять у вигляді трикутника. Основою цього трикутника є найнижчий ряд, який складається з 3 циліндрів. Помітимо, що при цьому лише для одного циліндра можна знайти інший циліндр, який стоїть рівно над ним. Нехай тепер деяку кількість циліндрів поставили трикутничком за тим самим принципом, розташували в основі 2023 циліндри. Скільки тепер знайдеться циліндрів, для яких існує хоча б один інший, який стоїть рівно над ним? (Циліндром, який стоїть рівно над даним, вважається тільки той циліндр, який стоїть вище та має з ним спільну вісь, тобто не зсунутий ані на міліметр вправо, вліво, вперед чи назад.)



Розв'язання. Помітимо, що умову задовольнятимуть всі циліндри, окрім тих, які розташовані вздовж бічних сторін трикутника. Тому шуканих циліндрів буде 2021 у найнижчому ряду, 2020 у наступному ряду вище, 2019 далі і т.д. до 1. Отже, всього таких циліндрів знайдеться $2021 + 2020 + \dots + 1 = \frac{2021 \cdot (2021+1)}{2} = 2\,043\,231$.

Відповідь: сума послідовних натуральних чисел від 1 до 2021, яка дорівнює 2 043 231.

7. Площину розфарбували в чотири кольори. Доведіть, що за будь-якого розфарбування обов'язково знайдеться пряма, яка містить принаймні три точки, які матимуть різний колір.

Розв'язання. Розглянемо чотири точки різних кольорів. Якщо три з них лежать на одній прямій, то це і є потрібна пряма. Якщо жодні три не лежать на одній прямій, то вони утворюють чотирикутник. Розглянемо точку перетину прямих, які містять діагоналі цього чотирикутника. Якого б кольору не виявилася ця точка, одна з діагоналей буде утворювати шукану пряму.

8. 26 різних вантажівок наповнили кавунами. Відомо, що у кожній з них непарна кількість кавунів: у найменшій вантажівці 165 кавунів, у наступній за величиною 167, у кожній наступній на два кавуни більше, ніж у попередній. Було отримано замовлення від п'яти мереж супермаркетів, кожна з яких очікує отримати не більше 1000 кавунів. Чи вийде розподілити всі 26 вантажівок серед них, не переміщуючи кавуни між вантажівками?

Розв'язання. Сумарна кількість кавунів у 26 вантажівках дорівнює $165 + 167 + \dots + 215 = 4940 < 5000$, тож здається, що це реалізувати можна. Однак помітимо, що хоча б одній мережі необхідно буде відправити принаймні 6 вантажівок. А кількість кавунів у 6 найменших вантажівках

дорівнює $165 + 167 + \dots + 175 = 1020 > 1000$. Отже, розподілити всі 26 вантажівок не вийде.

Відповідь: ні, не вийде.

III тур

9. Автобус вважається переповненим, якщо у ньому понад 100 пасажирів. У певний момент часу на маршруті знаходиться деяка кількість автобусів, серед яких є переповнені. Що виявиться більшим — відсоток переповнених автобусів чи відсоток пасажирів, які їдуть переповненими автобусами в цей момент?

Розв'язання. Пофарбуємо переповнені автобуси у червоний колір. У кожному автобусі на маршруті змінимо (зменшимо чи збільшимо) кількість пасажирів так, щоб їх стало рівно 100. Тепер у кожному автобусі виявиться однакова кількість пасажирів, тому відсоток червоних автобусів дорівнюватиме відсотку пасажирів, які у них знаходяться. Але при цьому кількість пасажирів у червоних автобусах ставала меншою, бо нам доводилося звідти «висаджувати» пасажирів, у не червоних — навпаки, збільшувалася. Тож відношення кількості пасажирів у червоних автобусах до числа людей у не червоних стало меншим, ніж було раніше. Тому і відношення (у тому числі відсоткове) кількості пасажирів червоних автобусів до загальної кількості пасажирів в усіх автобусах зменшилося. Отже, відсоток пасажирів червоних автобусів початково був більшим.

Відповідь: відсоток пасажирів більший.