Десятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Двенадцатая устная олимпиада по геометрии

г. Москва, 13 апреля 2014 года

Решения задач

8–9 класс

1. (*Ю. Блинков*) В треугольнике ABC: $\angle A = 45^\circ$, BH — высота, точка K лежит на стороне AC, причем $BC = CK$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABK совпадает с центром вневписанной окружности треугольника BCH. (*Вневписанной окружностью называется окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон.*)

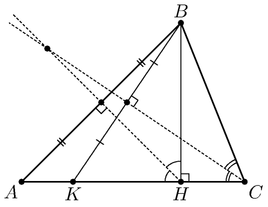

Рис. 8–9.1

Решение. Поскольку треугольник BCK — равнобедренный, то серединный перпендикуляр к стороне BK совпадает с биссектрисой угла ACB (см. рис. 8–9.1). Треугольник AHB — также равнобедренный, поэтому серединный перпендикуляр к стороне AB совпадает с биссектрисой угла AHB. Следовательно, центр описанной окружности треугольника ABK совпадает с точкой пересечения биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника BCH, то есть, с центром его вневписанной окружности.

2. (*А. Гаркавый*, *А. Хачатурян*) Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне AB взята точка M так, что $AD = DM$. На стороне AD взята точка N так, что $AB = BN$. Докажите, что $CM = CN$.

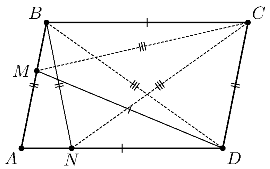

Рис. 8–9.2

Решение. Поскольку $ABCD$ — параллелограмм, то $DM = AD = BC$, следовательно, $DMBC$ — равнобокая трапеция (см. рис. 8–9.2). Аналогично, $BN = AB = CD$, то есть, $BNDC$ — также равнобокая трапеция. В равнобокой трапеции диагонали равны, следовательно, $CN = BD = CM$, что и требовалось.

Комментарий. Отметим, что точки M и N лежат на описанной окружности треугольника BCD.

3. (*А. Шаповалов*, *А. Заславский*) Существует ли выпуклый пятиугольник, в котором каждая диагональ равна какой-то стороне?

Ответ: да, существует, см., например, рис. 8–9.3а.

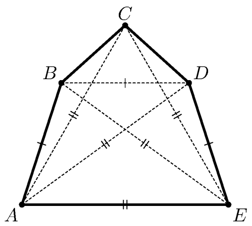

Рис. 8–9.3а

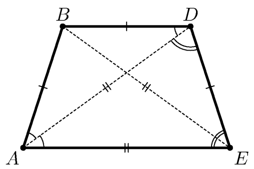

Рис. 8–9.3б

Решение. Рассмотрим пятиугольник $ABCDE$, изображенный на рис. 8–9.3а, то есть, такой пятиугольник, у которого диагонали AC, AD, BE и CE равны стороне AE, а диагональ BD равна сторонам AB и DE. Покажем, как он может быть получен.

Точка C является вершиной равностороннего треугольника ACE, а $ABDE$ — равнобокая трапеция, у которой $AB = BD = DE$ и $AD = BE = AE$. Искомой трапецией является трапеция, у которой $\angle A = \angle E = 72^\circ$, а диагонали AD и BE равны стороне AE. Действительно, $\angle ADE = \angle AED = 72^\circ$, $\angle DAE = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$, $\angle BDA = \angle DAE = 36^\circ$ и $\angle BAD = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ$, то есть, $AB = BD = DE$.

Комментарий. Отметим, что A, B, D и E — четыре последовательных вершины правильного пятиугольника.

4. (*А. Гаркавый*) В треугольнике ABC серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC пересекают сторону AC в точках P и Q соответственно, причем точка P лежит на отрезке AQ. Докажите, что описанные окружности треугольников PBC и QBA пересекаются на биссектрисе угла PBQ.

Решение. Пусть X — точка пересечения описанных окружностей треугольников PBC и QBA, а $\angle QBC = \angle BCQ = \alpha$ (см. рис. 8–9.4а). Тогда $\angle AQB = 2\alpha$ (как внешний в треугольнике BCQ). Из равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, получим, что $\angle PXB = \angle PCB = \alpha$ и $\angle AXB = \angle AQB = 2\alpha$. Следовательно, XP — биссектриса угла X в треугольнике AXB.

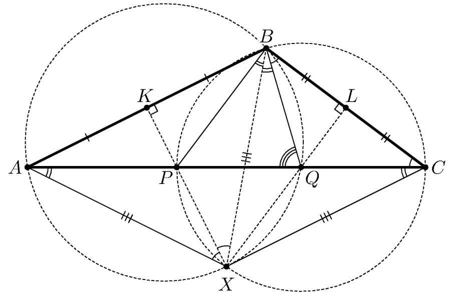

Рис. 8–9.4а

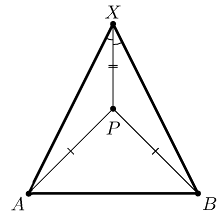

Рис. 8–9.4б

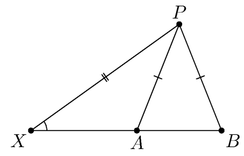

Рис. 8–9.4в

Докажем, что точки X, P и K лежат на одной прямой. Это можно сделать разными способами.

Первый способ. Серединный перпендикуляр PK к стороне AB треугольника AXB и биссектриса угла X пересекаются в середине дуги AB описанной окружности треугольника AXB. Следовательно, X, P и K лежат на одной прямой (иначе у прямых KP и PX было бы две точки пересечения, что невозможно).

Второй способ. Рассмотрим отдельно треугольник AXB (см. рис. 8–9.4б). В треугольниках AXP и BXP равны две стороны и угол, противолежащий одной из этих сторон. Следовательно, либо эти треугольники равны, либо $\angle PAX + \angle PBX = 180^\circ$ (см. рис. 8–9.4в). Второй случай невозможен, поскольку тогда сумма углов треугольника AXB будет больше 180°. Следовательно, $\triangle AXP = \triangle BXP$, откуда $AX = XB$, то есть, X лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB.

Аналогично можно доказать, что точки X, Q и L лежат на одной прямой.

Вернемся к решению задачи. Из доказанного следует, что $AX = XB = XC$, то есть, $\angle PBX = \angle XAC = \angle XCA = \angle QBX$, поэтому BX — биссектриса угла PBQ.

Комментарий. Заметим, что:
1. X — центр описанной окружности треугольника ABC;
2. X — центр вневписанной окружности треугольника PBQ.

Отметим, что каждый из этих фактов дает другой способ решения: можно определить точку X как центр описанной окружности треугольника ABC или как центр вневписанной окружности треугольника PBQ, и затем доказать, что она принадлежит обеим окружностям из условия.

5. (*Д. Прокопенко*) Отрезок AD — диаметр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Через точку пересечения высот этого треугольника провели прямую, параллельную стороне BC, которая пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEF в два раза больше стороны BC.

Решение. Пусть X и Y — точки пересечения прямых BD и CD с прямой EF (см. рис. 8–9.5). Заметим, что углы ABD и ACD — прямые. Поэтому нам достаточно доказать, что BC — средняя линия треугольника XYD. Действительно, тогда $XB = DB$, то есть, треугольник XED — равнобедренный, откуда $XE = DE$. Аналогично, $YF = DF$, следовательно, $XY = XE + EF + FY = DE + EF + DF = 2BC$.

Итак, докажем, что BC — средняя линия. Заметим, что $BHCD$ — параллелограмм (BD и CH перпендикулярны AB, BH и CD перпендикулярны AC). Следовательно, отрезок DH делится стороной BC пополам. Тогда, в силу параллельности прямых BC и EF, получаем искомое.

Комментарий. В заключительной части решения было показано, что точка, симметричная H относительно середины стороны BC, лежит на описанной окружности треугольника ABC и диаметрально противоположна точке A.

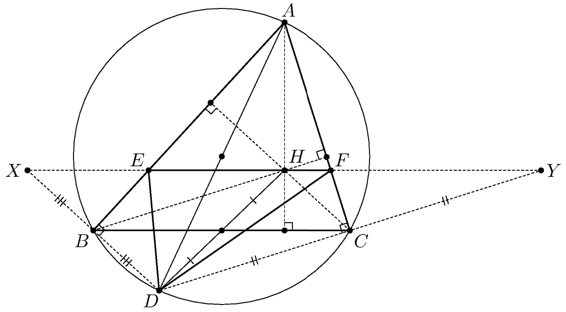

Рис. 8-9.5

6. (*К.Кноп*) Внутри равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB взята точка M такая, что угол MAB на 15° больше угла MAC, а угол MCB на 15° больше угла MBC. Найдите угол BMC.

Ответ: 150°.

Решение. Пусть X — точка пересечения AM и высоты CH треугольника ABC (см. рис. 8–9.6а). Рассмотрим случай, когда точка X лежит на отрезке AM (в конце решения мы покажем, что другой случай невозможен). Из условия следует, что $\angle BAX = 30^\circ$. Тогда $\angle CXM = \angle AXH = 90^\circ - \angle XAH = 60^\circ$. Поскольку CH также является медианой треугольника ABC, то треугольник AXB — равнобедренный, то есть, $\angle BXH = 60^\circ$. Следовательно, и $\angle BXM = 60^\circ$.

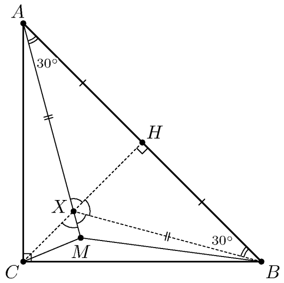

Рис. 8–9.6а

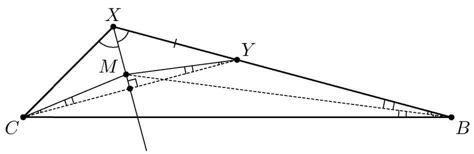

Рис. 8–9.6б

Рассмотрим отдельно треугольник CXB. В нем $\angle XCB = 45^\circ$, $\angle XBC = 15^\circ$, $\angle CXB = 120^\circ$ и XM — биссектриса угла CXB (см. рис. 8–9.6б). Докажем, что BM — биссектриса угла CBX. Обозначим $\angle MBC = \alpha$, тогда $\angle MCB = 15^\circ + \alpha$. Выберем на отрезке XB такую точку Y, что $\angle YCB = 15^\circ$, тогда $\angle XCY = 30^\circ$. Кроме того, $\angle XYC = 30^\circ$ (как внешний угол в треугольнике CYB), следовательно, треугольник CXY — равнобедренный.

Поскольку XM — биссектриса равнобедренного треугольника CXY, то она также является медианой и высотой, следовательно, CMY — также равнобедренный, откуда $\angle MYC = \angle MCY = \alpha$. С другой стороны, $\angle MBC = \alpha$, то есть, четырехугольник $CMYB$ — вписанный. Тогда $\angle MBY = \angle MCY = \alpha$, откуда $2\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 7,5^\circ$ и $\angle CMB = 150^\circ$.

Докажем, что точка X лежит на отрезке AM. Пусть это не так (см. рис. 8–9.6.в). Снова рассмотрим треугольник AXB отдельно и проведем отрезок CY так, что $\angle YCB = 15^\circ$. По условию, $\angle MCB = 15^\circ + \angle MBC$. Так как $\angle XCB = 30^\circ + \angle XBC$, то чтобы выполнялось условие, угол MBX должен быть на 15° больше MCX. Треугольник CMY — равнобедренный, следовательно, $\angle MCX = \angle MYX > \angle MBY$, то есть, такое расположение точек невозможно.

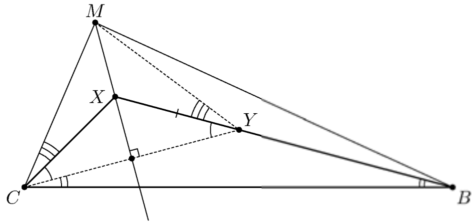

Рис. 8-9.6в

Материалы подготовили: А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский, П. Кожевников.