**Десятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина**

**Двенадцатая устная олимпиада по геометрии**

**г. Москва, 13 апреля 2014 года**

# Решения задач

## 10–11 класс

**1.** (*Ю. Блинков*) В трапеции $ABCD$: $BC < AD$, $AB = CD$, $K$ — середина $AD$, $M$ — середина $CD$, $CH$ — высота. Докажите, что прямые $AM$, $CK$ и $BH$ пересекаются в одной точке.

**Решение.** Заметим, что $AM$ и $CK$ — медианы треугольника $ACD$, следовательно, точка $L$ их пересечения делит отрезок $CK$ в отношении $2 : 1$ (см. рис. 10–11.1). Кроме того, $BC : KH = 2 : 1$, поскольку $KH = \frac{AD}{2} - \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}BC$. Используя параллельность $AD$ и $BC$ получим, что $BH$ делит отрезок $CK$ в отношении $2 : 1$, то есть, проходит через точку $L$.

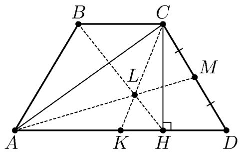


Рис. 10–11.1

**2.** (*А. Хачатурян*) Можно ли правильную треугольную призму разрезать на две равные пирамиды?

**Ответ:** да, можно.

**Решение.** Пусть $M$ — середина $AA'$. Тогда пирамиды $A'B'BMC'$ и $C'CAMB$ равны (см. рис. 10–11.2). Это можно доказать различными способами.

*Первый способ.* Основания $AMC'C$ и $A'B'BM$ данных пирамид равны и грани $A'C'B'$ и $ABC$, являющиеся равными равносторонними треугольниками, примыкают к соответствующим сторонам оснований и перпендикулярны плоскостям оснований.

*Второй способ.* Одна пирамида получается из другой симметрией относительно прямой $MO$, где $O$ — центр грани $BCC'B'$. Действительно, при этой симметрии точки $A'$ и $A$, $B'$ и $C$, $C'$ и $B$ переходят друг в друга.

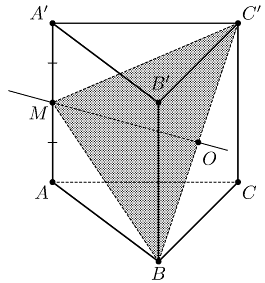


Рис. 10–11.2

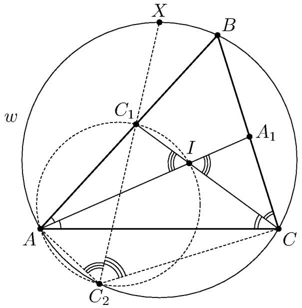


Рис. 10–11.3

**3.** (*Д. Швецов*) Биссектрисы $AA_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $I$. Описанные окружности треугольников $AIC_1$ и $CIA_1$ повторно пересекают дуги $AC$ и $BC$ (не содержащие точек $B$ и $A$ соответственно) описанной окружности треугольника $ABC$ в точках $C_2$ и $A_2$ соответственно. Докажите, что прямые $A_1A_2$ и $C_1C_2$ пересекаются на описанной окружности треугольника $ABC$.

**Решение.** Докажем, что прямые $C_1C_2$ и $A_1A_2$ проходят через середину дуги $ABC$ (см. рис. 10–11.3).

Пусть $X$ — точка пересечения прямой $C_1C_2$ и описанной окружности $w$ треугольника $ABC$. Из равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, следует, что $\angle AC_2X = \angle AC_2C_1 = \angle AIC_1$. Кроме того, $\angle AIC_1 = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle C}{2} = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$. Таким образом, $\angle AC_2X = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$. Поскольку $\angle AC_2C = 180^\circ - \angle B$, то $\angle AC_2X = \angle CC_2X$, то есть, $X$ — середина дуги $AC$.

То, что прямая $A_1A_2$ также пересекает $w$ в середине дуги $ABC$, доказывается аналогично.



**4.** (*А. Заславский*) Медианы $AA_0$, $BB_0$ и $CC_0$ остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$, а высоты $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ — в точке $H$. Касательная к описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ в точке $C_1$ пересекает прямую $A_0B_0$ в точке $C'$. Точки $A'$ и $B'$ определяются аналогично. Докажите, что $A'$, $B'$ и $C'$ лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой $MH$.

**Решение.** Воспользуемся без доказательства следующими известными фактами:

1. Основания высот и медиан лежат на одной окружности $w_1$ (называемой окружностью девяти точек). При этом центр $O_1$ этой окружности лежит на прямой $MH$, содержащей также центр $O$ описанной окружности $w$ треугольника $ABC$ (эта прямая называется прямой Эйлера).

2. Радикальная ось двух окружностей перпендикулярна их линии центров.

Подробнее про окружность девяти точек и про радикальную ось можно посмотреть в книгах В. В. Прасолов, «Задачи по планиметрии». — М.: МЦНМО, 2007 и Я. П. Понарин, «Элементарная геометрия. Том 1. Планиметрия». — М.: МЦНМО, 2008.

Рассмотрим утверждение задачи. Поскольку $O$ и $O_1$ принадлежат прямой $MH$ (то есть, $MH$ — линия центров окружностей $w$ и $w_1$), то достаточно доказать, что точки $A'$, $B'$ и $C'$ принадлежат радикальной оси $w$ и $w_1$ (см. рис. 10–11.4).

Докажем этот факт для точки $C'$ (доказательство для остальных точек аналогично). Покажем, что $CC'$ — касательная к окружности $w$. Это можно сделать различными способами.

*Первый способ.* Поскольку прямые $CC_1$ и $A_0B_0$ перпендикулярны и отрезок $CC_1$ делится $A_0B_0$ пополам, то точки $C$ и $C_1$ симметричны относительно прямой $B_0C'$, следовательно, $\angle C'CA_0 = \angle C'C_1A_0$ и $\angle CB_0A_0 = \angle C_1B_0A_0$.

Поскольку $C_1C'$ — касательная к окружности $w_1$, то $\angle A_0B_0C_1 = \angle A_0C_1C'$. Используя симметрию точек $C$ и $C_1$ относительно $B_0C'$ и параллельность прямых $AB$ и $A_0B_0$ получим, что $\angle BAC = \angle A_0B_0C = \angle C'B_0C_1 = \angle A_0C_1C' = \angle C'CA_0$, то есть, $CC'$ — касательная к окружности $w$.

*Второй способ.* Воспользуемся тем, что описанная окружность и окружность девяти точек гомотетичны с центром в точке $H$ и коэффициентом $\frac{1}{2}$. При этой гомотетии касательная к окружности $w$ в точке $C$ перейдет в касательную к окружности $w_1$ в точке $T$ — середине отрезка $CH$. Эти касательные образуют с отрезком $CC_1$ равные углы. Кроме того, касательные к $w_1$ в точках $T$ и $C_1$ также образуют с $CC_1$ равные углы. Следовательно, и касательные к окружностям $w$ и $w_1$ в точках $C$ и $C_1$ соответственно, образуют с $CC_1$ равные углы. Значит, точка пересечения касательных лежит на серединном перпендикуляре к $CC_1$, то есть, на $A_0B_0$.

Вернемся к решению задачи. В силу симметрии, $C'C = C'C_1$, то есть степени точки $C'$ относительно окружностей $w$ и $w_1$ равны. Следовательно, точка $C'$ принадлежит радикальной оси этих окружностей, что и требовалось.

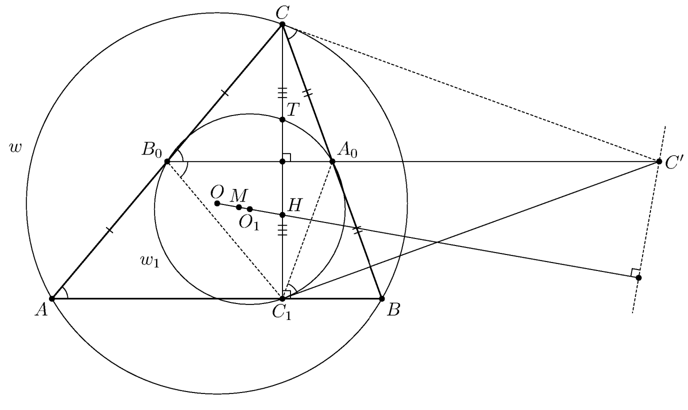


Рис. 10–11.4

**Комментарий.** Для доказательства того, что $CC'$ — касательная, также можно было воспользоваться симметрией описанных окружностей треугольников $C_1B_0A_0$ и $CB_0A_0$ и гомотетией с центром в точке $C$ и коэффициентом 2.

**5.** (*А. Заславский*) Дан правильный треугольник $ABC$, площадь которого равна 1, и точка $P$ на его описанной окружности. Прямые $AP$, $BP$, $CP$ пересекают соответственно прямые $BC$, $CA$, $AB$ в точках $A'$, $B'$, $C'$. Найдите площадь треугольника $A'B'C'$.

**Решение.** Из равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, и суммы углов треугольника получим, что $\angle CAB = \angle ACB = \angle APB = \angle BPC = \angle APC' = \angle CPA' = 60^\circ$, $\angle PBC = = \angle PAC = \angle PC'A$, $\angle PBA = \angle PCA = \angle PA'C$ (см. рис. 10–11.5). Следовательно, следующие пары треугольников подобны: $BPC'$ и $A'PB$; $C'PA$ и $APB'$; $A'PC$ и $CPB'$.

Из первого подобия следует, что $BP^2 = C'P \cdot A'P$, из второго: $AP^2 = C'P \cdot B'P$, из третьего: $CP^2 = B'P \cdot A'P$. Вычислим площадь треугольника $A'B'C'$ как сумму площадей треугольников $C'B'P$, $C'A'P$ и $A'B'P$ (попутно используя тот факт, что углы при вершине $P$ этих треугольников равны $120^\circ$).

$$S_{A'B'C'} = (C'P \cdot B'P + C'P \cdot A'P + A'P \cdot B'P)\frac{\sqrt{3}}{4} = (AP^2 + BP^2 + CP^2)\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

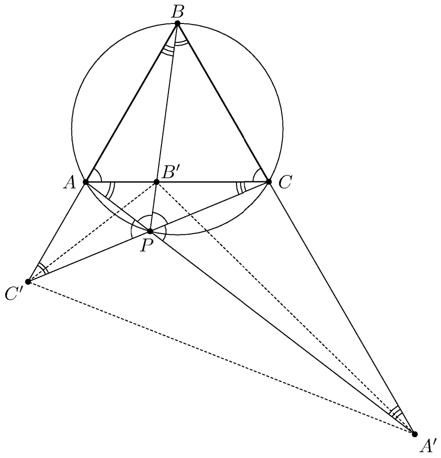


Рис. 10–11.5

Воспользуемся без доказательства известным фактом: для равностороннего треугольника $ABC$ со стороной $a$ и произвольной точки на его описанной окружности верно следующее равенство:

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 6R^2 = 2a^2. \qquad (*)$$

Тогда $S_{A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Поскольку $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 1$, то $S_{A'B'C'} = 2$.

**Комментарий.** Утверждение $(*)$ можно доказать, например, используя векторы. Кроме того, оно является частным случаем более общего утверждения: для правильного $n$-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ и точки $P$ на его описанной окружности верно, что $\sum\limits_{i=1}^{n} PA_i^2 = 2nR^2$.

**6.** (*А. Акопян, П. Кожевников*) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть $I$ и $J$ — центры окружностей, вписанных в треугольники $ABC$ и $ADC$ соответственно, а $I_a$ и $J_a$ — центры вневписанных окружностей треугольников $ABC$ и $ADC$ соответственно (вписанных в углы $BAC$ и $DAC$ соответственно). Докажите, что точка $K$ пересечения прямых $IJ_a$ и $JI_a$ лежит на биссектрисе угла $BCD$.

**Решение.** Докажем, что точка $K$ лежит внутри четырехугольника $ABCD$ (см. рис. 10–11.6а). Заметим, что прямые $II_a$ и $JJ_a$ пересекаются в точке $A$, поскольку точки $I$ и $I_a$ лежат на биссектрисе угла $BAC$, а $J$ и $J_a$ лежат на биссектрисе угла $DAC$.



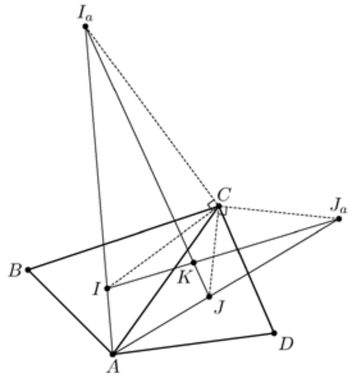


Рис. 10–11.6а

Поскольку $\angle ICJ + \angle ICI_a = \dfrac{\angle BCD}{2} + 90^\circ < 180^\circ$ и аналогично $\angle JCI + \angle JCJ_a < 180^\circ$, то точка $K$ лежит внутри угла $ICJ$.

Далее, заметим, что $\angle ICI_a = \angle JCJ_a = 90^\circ$. Следовательно, биссектрисы углов $ICJ$ и $I_aCJ_a$ лежат на одной прямой. Нам потребуется следующая лемма:

**Лемма.** *Пусть биссектрисы углов $XOX'$ и $YOY'$ лежат на прямой $l$. $Z$ — точка пересечения прямых $XY$ и $X'Y'$, $Z'$ — точка пересечения прямых $XY'$ и $XY'$. Тогда прямые $OZ$ и $OZ'$ симметричны относительно $l$.*

Применив эту лемму к углам $ICJ$ и $I_aCJ_a$, получим, что $\angle ICA = \angle JCK$, то есть, $\angle DCK = \angle DCJ + \angle JCK = \dfrac{\angle DCA}{2} + + \angle ICA = \dfrac{\angle DCA}{2} + \dfrac{\angle BCA}{2} = \dfrac{\angle DCB}{2}$, что и требовалось.

Докажем лемму для случая, когда углы $XOY$ и $X'OY'$ — прямые. Это можно сделать разными способами.

*Первый способ.* Опустим перпендикуляры $OM$, $OK$, $OL$ и $OP$ на прямые $XY$, $X'Y$, $XY'$ и $X'Y'$ соответственно (см. рис. 10–11.6б).

Покажем, что точки $M$, $K$, $L$ и $P$ лежат на одной окружности. Для этого достаточно доказать, что $\angle MKP = \angle MLP$. Обозначим $\angle MKY = \alpha$, $\angle PKO = \beta$. Четырехугольник $MKOY$ — вписанный, поэтому $\angle MOY = \angle MKY = \alpha$. Поскольку $XO \perp OY$ и $OM \perp XY$, то $\angle MXO = = \angle MOY = \alpha$. И, наконец, из того, что $MXLO$ — вписанный, получим, что $\angle MLO = \angle MXO = \alpha$.

Четырехугольник $OKX'P$ — вписанный, то $\angle OX'P = \angle OKP = \beta$. Поскольку $X'O \perp Y'O$ и $OP \perp X'Y'$, то $\angle POY' = \angle OX'Y' = \beta$. И, наконец, из того, что $OLPY'$ — вписанный, получим, что $\angle Y'LP = \angle POY' = \beta$.

Таким образом, $\angle MKP = 90^\circ + \alpha + \beta = \angle MLP$, следовательно, $MKLP$ — вписанный четырехугольник, что и требовалось.

Тогда $\angle MKL + \angle MPL = 180^\circ$.

Заметим, что $\angle MKL = \alpha + 90^\circ + \angle OKL = \angle OYZ + \angle OZ'L$ $(*)$ (в силу вписанности четырехугольников $YMKO$ и $OKZ'L$). Кроме того, $\angle MPL = \angle MPO + \angle OPL = \angle MZO + \angle OY'Z'$ $(**)$ (поскольку четырехугольники $MOPZ$ и $OLPY'$ — вписанные).

Кроме того, $\angle OYZ + \angle MZO = 180^\circ - \angle ZOY$ и $\angle OY'Z' + \angle OZ'L = 180^\circ - \angle Z'OY'$. Сложив левые и правые части этих равенств и левые и правые части равенств $(*)$ и $(**)$ соответственно, получим, что $\angle ZOY + \angle Z'OY' = 180^\circ$. Следовательно, прямые $Z'O$ и $ZO$ симметричны относительно биссектрисы углов $XOX'$ и $YOY'$. Другие случаи расположения точек рассматриваются аналогично.

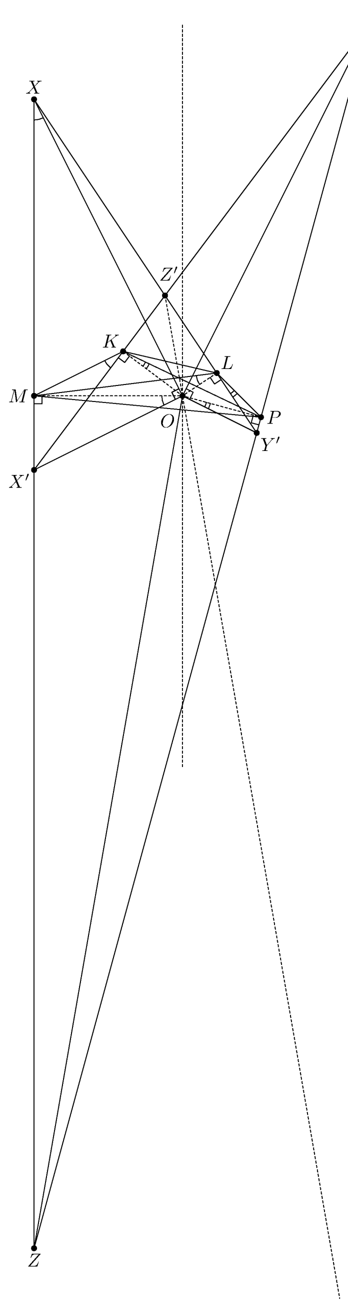


Рис. 10–11.6б



*Второй способ.* Пусть $T$, $U$, $V$, $W$ — точки пересечения прямых $II_a$ и $CJ_a$, $IJ_a$ и $CJ$, $I_aJ_a$ и $CJ$, $CI_a$ и $IJ_a$ соответственно (см. рис. 10–11.6в). Используем тот факт, что при центральной проекции сохраняется двойное отношение четырех точек. Рассмотрев центральную проекцию прямой $II_a$ на прямую $CJ$ с центром $J_a$ и центральную проекцию прямой $CJ$ на прямую $IJ_a$ с центром $I_a$, получаем равенство двойных отношений $(ITI_aA) = (UCVJ) = (UWJ_aK)$. Воспользуемся тем, что

$$(ITI_aA) = \frac{II_a}{I_aT} : \frac{IA}{TA} = \frac{\sin ICI_a}{\sin I_aCT} : \frac{\sin ICA}{\sin TCA}, \text{ а } (UWJ_aK) = \frac{UJ_a}{WJ_a} : \frac{UK}{WK} = \frac{\sin UCJ_a}{\sin WCJ_a} : \frac{\sin UCK}{\sin WCK}.$$

Также заметим, что $\sin I_aCT = \sin I_aCJ_a$, $\sin TCA = \sin J_aCA$, $\sin WCJ_a = \sin I_aCJ_a$, $\sin WCK = \sin I_aCK$, $\sin UCK = \sin JCK$ и, наконец, $\sin ICI_a = \sin JCJ_a = \sin 90^\circ = 1$. Следовательно, $\frac{\sin J_aCA}{\sin ICA} = \frac{\sin I_aCK}{\sin JCK}$.

Положим $\angle J_aCI = \angle I_aCJ = t$, $\angle ICA = x$, а $\angle JCK = y$. Тогда $\frac{\sin(t-x)}{\sin x} = \frac{\sin(t-y)}{\sin y}$, откуда (используя формулу синуса разности) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y$, то есть, $\angle ICA = \angle JCK$.

**Комментарий.** 1. Про двойные отношения можно прочитать в в книге В. В. Прасолов, «Задачи по планиметрии». — М.: МЦНМО, 2007.

2. Заметим, что фактически мы доказали лемму не в частном случае, а в общем. Действительно, во втором способе решения мы использовали только то, что углы $XOY$ и $X'OY'$ равны, а в первом способе аналогичное рассуждение проходит, если проводить прямые под данным (ориентированным) углом.

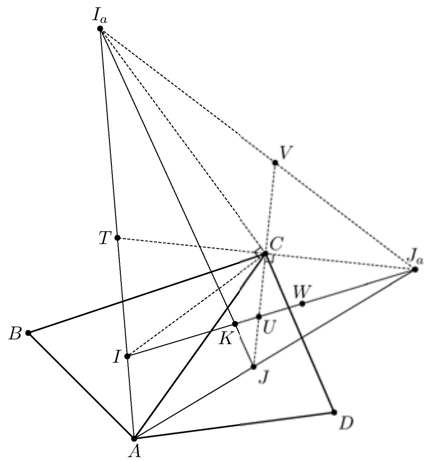


Рис. 10–11.6в

**Материалы подготовили:** А. Блинков, Ю. Блинков, А. Горская, А. Заславский, П. Кожевников.